Matematica per tutti

A cura di **Maurizio Gentile**[1]

[1] Consulente di ricerca presso l'Iprase del Trentino, Docente di Psicologia dell'Istruzione presso la SISF di Venezia-Mestre, Università Salesiana.

INTRODUZIONE

Nell'anno formativo 2006/2007 il numero di allievi del sistema di formazione regionale ha raggiunto il suo massimo storico superando quota 986.000 partecipanti. L'esame delle varie filiere[2], per l'a.f. 2006-07, mostra come la formazione destinata agli adulti raccolga il maggior numero di allievi (539.198), mentre la Formazione di 2° livello è il secondo segmento per numero di allievi (169.279), seguita dalla Formazione di 1° livello con un numero di partecipanti pari a 127.947. L'andamento in crescita di tali dati è confermato anche in relazione all'anno corrente. Il numero di percorsi triennali mostra una crescita costante. Negli ultimi quattro anni si è passati dai 4.032 corsi ai 6.838 dell'a.f. 2007-2008, passando da 72.034 allievi a 130.431. Di questo gruppo il 73,2% è iscritto a percorsi triennali presso le agenzie formative, mentre il 26,8% è iscritto nei percorsi scolastici integrati con attività di formazione professionale. Le regioni che totalizzano il maggior numero di allievi in questi percorsi sono la Lombardia (34.973), il Piemonte (17.156) e il Veneto (15.161) (ISFOL, 2008).

L'incremento della partecipazione dei giovani allievi ai percorsi di Formazione di 1° livello documenta un andamento positivo che inizia con la sperimentazione dei percorsi triennali e che offre a quote significative di giovani in età di obbligo d'istruzione (fino ai 16) e di diritto-dovere (fino ai 18) un'opportunità concreta di qualificazione (ISFOL, 2008). Oltre a ciò i percorsi della formazione professionale costituiscono, in misura sufficiente, degli ambienti di apprendimento orientati allo sviluppo di competenze intellettive di base? L'attenzione posta su questo punto è dovuta al fatto che da questo segmento di allievi, la cui età è compresa tra i 14-17 anni, sono stati estratti i 15enni coinvolti nell'indagine OCSE-PISA. PISA, nell'attuale panorama di indagine a larga scala sulle competenze dei giovani scolarizzati, sembra il punto di riferimento più attendibile per valutare i livelli di competenza matematica raggiunti sia alla fine del biennio della scuola secondaria e sia nei percorsi di istruzione e formazione professionale (OECD, 2004, 2007, 2008). I dati dell'edizione 2006 documentano un sistematico differenziale tra le diverse filiere, che nel caso dei 15enni degli Istituti Professionali e della Formazione Professionale può concretizzarsi fino a 1,5 deviazione standard (150 punti di differenza).

Spostando la riflessione sulla resa complessiva del sistema scolastico italiano, una recente indagine, svolta dall'ufficio studi del MPI, evidenzia che la matematica è la disciplina che ha la percentuale più alta di insufficienze nella scuola superiore: 62,4% dei casi con valori negativi in tutti gli indirizzi di scuola. Le insufficienze riscontrate negli allievi del quinto anno, per tutte le tipologie di scuola superiore, sono il 60,9% dei casi analizzati. In uscita dalla scuola secondaria superiore, oltre la metà degli allievi ricevono giudizi negativi in matematica (MPI, 2008).

Nell'anno scolastico 2006/2007, erano **408 mila** gli alunni italiani (il **43,3%** degli allievi ammessi con debito alle classi delle scuole superiori) che avevano un debito in matematica (MPI, 2007). Una carenza che accomunano, anche in questo caso, trasversalmente gli indirizzi di ogni ordine e grado. In particolare, gli allievi che ottenevano un debito in matematica erano:

[2] 1° livello nell'obbligo formativo - 2° livello e IFTS – Disoccupati – Apprendisti – Occupati - Formazione Permanente - Soggetti a rischio - Altre categorie.

- 129.000 negli istituti tecnici
- 104.000 nei licei scientifici
- 80.000 negli istituti professionali
- 39.000 nei licei classici.

Il dato si distribuisce omogeneamente da Nord (44,5% degli allievi con debito, 90.000 alunni) a Sud (41,7%, 124.000 alunni) passando per il Centro (44%, 79.000 alunni) e le isole (44,1%, 55.000 alunni).

Insuccessi e percorsi accidentati potrebbero spiegare la disaffezione dei giovani verso le carriere scientifiche. Dal 1989 al 2000, gli allievi di chimica sono passati da 2.274 a 1.293, con una flessione del 43%. In fisica da 3.216 a 1.428, con una flessione del 55,6% e quelli di matematica da 4.396 a 1.611, con una flessione del 66,3%. Questo fenomeno sta drammaticamente producendo un costante allontanamento dei giovani italiani dallo studio universitario delle discipline scientifiche. Tale elemento di crisi si rafforza in relazione al fatto che lo sviluppo di *literacy in ambito matematico e scientifico* è da più parti ritenuto un fattore cruciale per la crescita economica e sociale del nostro Paese (Roncoroni, 2007).

La riorganizzazione del secondo ciclo scolastico dovrebbe tenere in stretta considerazione tali evidenze. L'obbligo d'istruzione (fino ai 16 anni di età) e un assetto ordinamentale definitivo dei Licei, degli Istituti Tecnici e Professionali, richiederanno un progressivo raccordo e un'armonizzazione degli standard formativi relativi alle competenze di base e di cittadinanza. Di questi cambiamenti saranno investiti i bienni dei Licei, degli Istituti Tecnici e Professionali e quello dei percorsi triennali sperimentali, ovvero i 15enni di cui è possibile valutare lo stato di sviluppo delle competenze di base mediante l'indagine OCSE-PISA.

IL VALORE DELLA MATEMATICA

I cittadini sono sempre più spesso chiamati a confrontarsi con una molteplicità di situazioni che implicano l'uso di conoscenze matematiche, di tipo quantitativo, spaziale, probabilistico, ecc. I quotidiani, le riviste, la televisione e Internet sono pieni di informazioni presentate sotto forma di tabelle, diagrammi e grafici su argomenti quali il clima, l'economia, la medicina e lo sport, per citarne solo alcuni. I cittadini sono sistematicamente esposti ad informazioni su questioni quali "il riscaldamento globale e l'effetto serra", "il saldo negativo tra nascite e morti", "la concentrazione di PM10 nell'aria", "il ritiro delle calotte artiche", ecc. Le persone sono, anche, chiamate a confrontarsi con la necessità di comprendere contratti, fatture, buste paga, estratti conto, ricevute relative a transazioni economiche effettuate, prezzi scontati. È, dunque, piuttosto interessante capire se i giovani cittadini sono in grado di pensare e conoscere la matematica per comprendere e affrontare attivamente situazioni di vita quotidiana.

La matematica nell'attuale politica educativa

La matematica ha uno specifico profilo formativo che richiede una forte attenzione alla continuità tra i vari ordini di scuola. Tale finalità è ribadita sia nelle *Indicazioni per il Curricolo* (MPI, Settembre 2007), sia nel *Regolamento sul Nuovo Obbligo d'Istruzione* (MPI, Agosto 2007). In entrambi i documenti si afferma che la cultura e le competenze scientifico-matematiche *danno strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana*. Per avvicinare i giovani a tali discipline è opportuna, secondo questi documenti, una nuova impostazione metodologica, dove l'alunno costruisce attivamente le sue conoscenze e dimostrando l'uso del sapere matematico in situazioni e problemi di vita reale.

Rinnovare la didattica della matematica implica la progettazione di un curricolo che deve sempre più confrontarsi con i quadri di competenza indicati dalle indagini internazionali, come IEA-TIMMS e OCSE-PISA. Livelli di padronanza adeguati sono ritenute finalità formative prioritarie sia in ambito UE che nazionale[3]. La scuola è, dunque, chiamata alla «costruzione di percorsi

[3] Il nuovo *Obbligo d'Istruzione* sembra rafforzare questa linea di tendenza. Individuando quattro assi culturali (linguaggi, matematica, scientifico-tecnologico, storico-sociale), il Ministero chiede alle istituzioni scolastiche e formative un ripensamento del biennio secondario, che dovrà essere di tipo unitario ma non unico, centrato su terminalità significative (assi culturali e competenze chiave), e curando un intreccio non solo formale tra discipline d'indirizzo e competenze da conseguire al termine dell'obbligo. In questo quadro, i due anni successivi al conseguimento del titolo di licenza media, assumerebbero un carattere esplicitamente formativo. Le *Indicazioni per il Curricolo e l'Obbligo d'Istruzione* sono tentativi di superamento della logica dei programmi rigidi e prescrittivi, visti come repertori di contenuti, strutturati per materie di studio, ove allievi e insegnanti agiscono in un'ottica prettamente esecutiva. Si avanza invece una logica curricolare e di lavoro per competenze nel quale si valorizza l'autonomia e la dimensione progettuale, si privilegiano i compiti di realtà alle nozioni, si preferisce l'essenzialità dei contenuti all'enciclopedismo. La pretesa di insegnare tutto, con il corollario inevitabile di curricoli frammentati, condiziona in maniera determinante le metodologie di insegnamento. L'approfondimento, la discussione, l'esplorazione, i laboratori, l'operatività richiedono tempi più distesi. Si muovono in questa direzione le riforme più recenti a livello internazionale. In

di apprendimento orientati all'acquisizione delle competenze chiave che preparino i giovani alla vita adulta» in una prospettiva di *apprendimento permanente*[4]. Sia le competenze di base che di cittadinanza dovrebbero essere conseguibili all'interno di un unico processo di insegnamento/apprendimento[5], che consolidi, secondo una prospettiva verticale e unitaria, la padronanza delle competenze di base .

Una matematica delle idee

Secondo Lucio Villani la matematica è una disciplina spiccatamente scolastica: o la si impara a scuola, o escluse delle virtuose eccezioni, non la si impara più (Villani, 2003). È un'affermazione forte che, tuttavia, denota la convinzione che il destino del sapere matematico per i nostri giovani cittadini si gioca essenzialmente a scuola.

Detto ciò, a *che serve la matematica*? Secondo l'autore di "matematica esplicita" ne basterebbe ben poca, visto, anche, la crescente diffusione delle calcolatrici a basso costo e a ottime prestazioni. Per buona parte della popolazione, tutto si riduce alle quattro operazioni di base, ad un minimo di "nomenclatura geometrica". Forse a qualcuno capiterà di calcolare il volume di un solido a forma di scatola (serbatoio d'acqua, stanza, ecc.), e più ottimisticamente, si potrebbe immaginare che ad altri si ponga l'esigenza di svolgere calcoli mentali approssimati per capire la sensatezza di un risultato fornito dalla calcolatrice 8ad esempio nel caso della conversione da euro a lire o altra valuta).

Se quanto discusso è verosimile, emerge, allora, l'esigenza di un cambiamento nel modo di impostare il curricolo, l'insegnamento e la valutazione delle competenze matematiche. Secondo l'autore la matematica scolastica dovrebbe dare «minore enfasi sui calcoli noiosi e ripetitivi che possono essere demandati ad uno strumento, e maggiore attenzione agli aspetti concettuali, ai *processi* (c.d.a), quali la corretta impostazione delle procedure di calcolo e il controllo della sensatezza dei risultati, e […] al ragionamento, con l'obiettivo di promuovere negli allievi una crescente fiducia nelle proprie capacità di affrontare e risolvere problemi aperti, anche in contesti non strettamente disciplinari».[6]

Sempre nello stesso scritto si tracciano due possibili scenari. In una *visione ottimistica* si pensa alla matematica in una posizione culturalmente sempre più pervasiva e centrale. La scuola primaria giocherà un ruolo fondamentale nel costruire gli elementi conoscitivi fondamentali che faranno poi da base per gli apprendimenti successivi. Nella scuola secondaria, l'insegnamento, opportunamente sfrondato degli aspetti più tecnicistici, si focalizzerà soprattutto sulle dimensioni concettuali del sapere matematico, ritenuti irrinunciabili per la formazione del "cittadino informato". Chi transiterà alla

Francia con lo "Zoccolo Comune" delle conoscenze e delle competenze da acquisire al termine della scuola dell'obbligo. In Spagna la LOE del 2006 concentra il curricolo sulle competenze essenziali. Negli USA il programma "*Less is more*" ossia "di meno è di più" cioè meno argomenti e più approfonditi. La riforma della scuola di base del Canada.

[4] Si veda pagina 7 del *Regolamento sull'Obbligo d'Istruzione*.

[5] Si veda pagina 8 del *Regolamento sull'Obbligo d'Istruzione*

[6] Ibidem, p. 7-8.

formazione universitaria scegliendo un corso di studio matematico scoprirà un campo di ricerche sconfinato e dagli sviluppi estremamente interessanti[7].

Nella *visione pessimistica,* i curricoli saranno liberalizzati, i giovani sceglieranno le discipline che faranno parte del loro percorso formativo personale, l'atteggiamento degli allievi sarà: "tutto e subito con minimo di fatica". Dopo l'obbligo, la matematica diventerà una disciplina facoltativa, per pochi coraggiosi. All'università sempre meno allievi si iscriveranno a matematica attratti da corsi di laurea meno impegnativi. Con ciò il ricambio generazionale dei matematici dediti a ricerche di confine nei campi più avanzati finirà per cessare. Questa visione si basa sul fatto che pochi decenni fa notevoli abilità matematiche erano necessaria per le professioni più svariate, oggi, tutti i calcoli più complicati sono eseguiti da pacchetti software. In futuro la società avrà bisogno di pochissimi "esperti" di alta competenza al quale toccherà, soprattutto, il compito di scrivere programmi informatici sempre più avanzati per utenti sempre meno interessati o incapaci di capire "perché e in quali condizioni" quei programmi eseguono specifiche operazione.
Ovviamente non è possibile prevedere il corso degli eventi, tuttavia, le cifre sui debiti e le insufficienze che sono state riportate all'inizio di questo paragrafo, sono indicatori molto più coerenti con il secondo scenario.

[7] Chi di noi sa, ad esempio, che alla base dei file crittografati v'è una proprietà fondamentali dei "numeri primi": la laboriosità necessaria per scomporre un "numero grande" in numeri primi? Altre tecniche matematiche sono alla base della memorizzazione di grandi quantità di dati. È il caso dei file ZIP, che permettono un risparmio di memoria quando si decide di compattare i dati anziché registrarli come file sorgente. Per finire ci di noi sa che un ingegnoso algoritmo matematico, detto "codice correttore", incorporato nella programmazione di un DVD o un CD permette di ripristinare i suoni o le immagini corrette anche laddove un primo graffio li avrebbe disturbati? Questi tre sono esempi di applicazioni delle conoscenze matematiche a oggetti e dispositivi familiari ormai a tutti.

LA COMPETENZA MATEMATICA DEI GIOVANI ITALIANI

In questa parte dello scritto sarà, da un lato, presentato il quadro di riferimento OCSE-PISA per la valutazione della competenza matematica, e dall'altro, saranno discussi una serie di risultati che mettono in luce il livello di competenza matematica posseduto dai giovani italiani partecipanti all'indagine.

Cenni premilitari sull'indagine OCSE-PISA

L'indagine OCSE-PISA valuta i livelli di padronanza di una serie di competenze ritenute essenziali. Oltre a ciò la ricerca permette di capire quanto una serie di fattori individuali e di contesto fanno variare i risultati dei test di competenza sia in termini positivi e negativi. In PISA la competenza è intesa come la capacità di utilizzare conoscenze in situazioni problematiche e di riflettere su di esse. Non si tratta di un insieme di operazioni meramente procedurali ma di una competenza caratterizzata da tratti concettuali molto accentuati.

Il target su cui insiste l'indagine è la popolazione dei 15enni scolarizzati presenti nei diversi sistemi nazionali di istruzione. Il campione italiano del 2006 era costituito da allievi di tale età iscritti ai quattro indirizzi del secondo ciclo (Licei, Tecnici, Istituti professionali, Percorsi triennali della Formazione Professionale regionale) e dai 15enni ancora presenti nella scuola secondaria di primo grado. La rilevazione è stata svolta nel 2000, 2003 e 2006. Ogni edizione indaga in dettaglio un ambito di competenza. Nel 2000 fu la lettura, nel 2003 la matematica, nel 2006 la scienza. Con l'edizione 2009, in fase di ultimazione negli aspetti preparatori – la somministrazione delle prove è prevista per marzo/aprile 2009 - l'indagine torna ad avere come ambito principale la comprensione della lettura.

L'edizione del 2006 ha coinvolto 400.000 allievi, di 57 paesi, pari l'87% dell'economia mondiale. L'Italia ha partecipato con un campione di 21.773 allievi, a fronte di una numerosità media degli altri paesi pari a 5.000 individui. A 13 regioni l'OCSE ha aggiudicato separatamente un sovra-campionamento. Questo spiega l'alta numerosità del campione italiano.

La valutazione della competenza matematica in PISA

In PISA la *literacy matematica* è definita come la capacità degli allievi di analizzare, ragionare e comunicare in modo efficace idee e problemi matematici presenti in una molteplicità di situazioni. La padronanza del sapere matematico si esprime nella capacità di un individuo di comprendere il ruolo che la matematica ha nel mondo reale, di formulare valutazioni fondate e di usare le conoscenze matematiche per rispondere alle esigenze della vita reale.

In questa prospettiva la rilevazione è stata focalizzata su problemi del mondo reale. È stato evitato, così, di proporre problemi e situazioni che generalmente si affrontano a scuola. Viaggiando, preparando da mangiare, tenendo la propria contabilità o valutando questioni politiche un cittadino si trova spesso a interagire con situazioni nelle quali il pensare in termini quantitativi o spaziale può aiutare a chiarire, formulare o superare un problema. Certamente una base per la riuscita in questi compiti è data dalla scuola, tuttavia, essi richiedono la capacità di usare conoscenze e competenze in circostanze meno strutturate, in cui le istruzioni sono meno chiare e in cui è l'allievo a dover decidere quali conoscenze siano pertinenti e in che modo esse possano essere utilmente applicate.

Il concetto di *literacy matematica*

La definizione di competenza matematica è coerente con una teoria della struttura e dell'uso del linguaggio quale quella che emerge dai recenti studi socio-culturali sulla literacy. Il termine "literacy" si riferisce alla «capacità di un individuo di leggere, scrivere, ascoltare e parlare una lingua è lo strumento di mediazione più importante dell'attività sociale umana. Infatti, ciascun linguaggio umano e ciascun uso del linguaggio umano ha una struttura complicata collegata in modo complesso a una molteplicità di funzioni. Il fatto che una persona sappia leggere e scrivere in una lingua vuol dire che essa conosce molti aspetti della struttura di quella lingua ed è capace di farne uso per diverse funzioni sociali» (OCSE, 2004, p. 30).

Analogando con il concetto appena proposto, assimilare la matematica a una lingua implica che i giovani «devono non solo apprendere gli elementi della struttura propria del discorso matematico (i termini, i fatti, i segni e i simboli, le procedure e le abilità necessarie per eseguire determinate operazioni in sottocampi matematici specifici e la struttura di queste idee in ciascun sottocampo), ma anche imparare a usare tali elementi per risolvere problemi non familiari in una molteplicità di situazioni definite in termini di funzioni sociali» (OCSE, 2004, p. 30).

Che cosa s'intende per matematizzazione

Conoscere gli elementi che caratterizzano il linguaggio matematico vuol dire sia conoscere i termini, le procedure e i concetti di base che normalmente si apprendono a scuola, sia sapere come tali elementi vengono organizzati e utilizzati. Se da un lato nella consuetudine didattica si tende ad offrire molte nozioni matematiche, dall'altro, si cura molto poco la scoperta di come organizzare tali conoscenze né di come usarle per risolvere problemi reali. Tale definizione di matematica può essere illustrate ricorrendo al seguente esempio ed illustrando un possibile processo di matematizzazione che può attivarsi per rispondere alla situazione problematica proposta.

Il lampione
Il consiglio comunale ha deciso di mettere un lampione in un piccolo parco triangolare in modo che l'intero parco sia illuminato. Dove dovrebbe essere collocato il lampione?

Questo problema può essere risolto seguendo la strategia generale usata dai matematici, a cui si farà riferimento con il termine "matematizzazione". La matematizzazione può essere definita sulla base di un processo articolato in 5 passi.

1. Partire da un problema reale.
   Occorre localizzare il punto di un parco in cui mettere un lampione.

2. Strutturare il problema in base a concetti matematici.

Il parco può essere rappresentato come un triangolo e l'illuminazione di un lampione come un cerchio con il lampione al centro.

3. Isolare progressivamente il problema ritagliandolo dalla realtà attraverso processi quali il fare supposizioni sulle caratteristiche essenziali del problema stesso, il generalizzare e il formalizzare (mettendo così in evidenza gli aspetti matematici della situazione e trasformando il problema reale i un problema matematico che rappresenti fedelmente la situazione). *Il problema viene riformulato in: "localizzare il centro del cerchio circoscritto al triangolo".*

4. Risolvere il problema matematico.
Poiché il centro di un cerchio circoscritto a un triangolo giace nel punto di incontro degli assi dei lati del triangolo, occorre costruire gli assi di due lati del triangolo. Il loro punto di intersezione è il centro del cerchio.

5. Infine, tradurre la soluzione matematica nei termini della situazione reale.
La soluzione trovata viene applicata alla situazione del parco reale. Occorre ragionare sulla soluzione e riconoscere che se uno dei tre angoli fosse ottuso, la soluzione non sarebbe appropriata, poiché il lampione dovrebbe essere collocato fuori dal parco. Occorre anche riconoscere che l'ubicazione e la dimensione degli alberi nel parco sono altri fattori che influiscono sull'utilità della soluzione matematica.

Il processo, appena descritto, «caratterizza il modo in cui spesso i matematici fanno matematica in senso lato, il modo in cui la gente utilizza la matematica in un gran numero di lavori che svolge o che potrebbe dover svolgere, e il modo in cui cittadini informati e riflessivi dovrebbero avvalersi della matematica per impegnarsi pienamente e in modo competente nella realtà. In questa prospettiva imparare a matematizzare dovrebbe essere il primo obiettivo educativo per tutti gli allievi» (OECD, 2004, p. 31).

Oggi e nel futuro prossimo si avrà sempre più bisogno di cittadini competenti dal punto di vista matematico. Il rapido accumulo di informazione e conoscenze cresce in modo esponenziale e i cittadini si trovano spesso disorientati di fronte ad un'ampia massa di dati. In politica e soprattutto in economia si fa un uso sempre maggiore di informazioni di tipo quantitativo per sostenere le proprie tesi. Nel dibattito pubblico siamo sistematicamente sollecitati a formulare giudizi e valutare l'accuratezza delle conclusioni e delle affermazioni di indagini e studi.

Oltre a ciò l'importanza di formare cittadini capaci di pensare e conoscere la matematica riguarda la forza lavoro e, come nel caso del nostro Paese, la necessità di un forte cambiamento della specializzazione produttiva delle aziende. L'attuale crisi economica può essere un'importante occasione di ristrutturazione (CENSIS, 2008).

Appare in misura molto evidente il bisogno di persone che eseguano sempre meno lavori ripetitivi per tutta la vita, mentre, al contrario, chi lavora deve controllare il risultato di un'ampia gamma di apparecchi ad alta tecnologia, avendo a che fare con un flusso ininterrotto di informazioni e misurandosi con la necessità di risolvere problemi attraverso un lavoro di squadra. Secondo le analisi proposte in sede internazionale (OECD, 2008) sempre più occupazioni richiederanno la capacità di capire, comunicare, usare e spiegare concetti e procedimenti basati sul pensiero matematico. Le fasi del processo di matematizzazione esemplificate prima, possono riflettere gli elementi costitutivi di questo tipo di *formae mentis*.

I tre aspetti della *literacy matematica*

La valutazione della *literacy matematica* è basata su tre distinte componenti.

1. Le *situazioni* in cui sono inseriti i problemi. Sono quattro le situazioni tipo utilizzate per creare all'interno dei quesiti un contesto di lavoro funzionale allo svolgimento di operazioni matematiche: situazioni personali, scolastico/occupazionali, pubbliche, scientifiche.

2. La *conoscenza matematica* (o contenuti) che deve essere usata per risolvere il problema. Essa è classificato in relazione a quattro idee chiave (o fondamentali):
    a. *modelli di spazio e forma,*
    b. *cambiamento e relazioni,*
    c. *quantità,*
    d. *incertezza*.

3. Le *competenze* che devono essere attivate al fine di mettere in relazione la situazione del mondo reale, i problemi a cui danno origine e le conoscenze matematiche. Ovviamente tali competenze sono finalizzare a risolvere i problemi proposti nei singoli quesiti. L'ambito è stato organizzato per competenze specifiche[8] e raggruppamenti. Questi ultimi sono tre: *competenze di riproduzione, competenze di connessione, competenze di riflessione*.

La scelta di raggruppare specifiche competenze in *cluster* è dettata da diverse ragioni. Primo, è stata osservata una notevole sovrapposizione tra le diverse competenze. Durante lo soluzione di un problema, è generalmente necessario attivare simultaneamente molte di queste. Pertanto, qualsiasi tentativo di valutarle separatamente porterebbe alla costruzione di quesiti artificiosi, associata ad una scarsa capacità del test di descrivere e presentare in modo produttivo i livelli di padronanza raggiunti dagli allievi. Secondo, il profilo di competenze è personale. In ciascun individuo possono essere osservati combinazioni diverse delle stesse competenze, tanto da poter stabilire, almeno su un piano teorico, un bilancio di punti di forza e di debolezza per ciascun studente. Questo poiché l'apprendimento della matematica, così come in generale, i processi di costruzione della conoscenza, segue un andamento idiosincratico, sottratto, da un lato, a una standardizzazione lineare, e dall'altro, aperto all'esperienza, all'interazione, al coinvolgimento, alla negoziazione sociale.

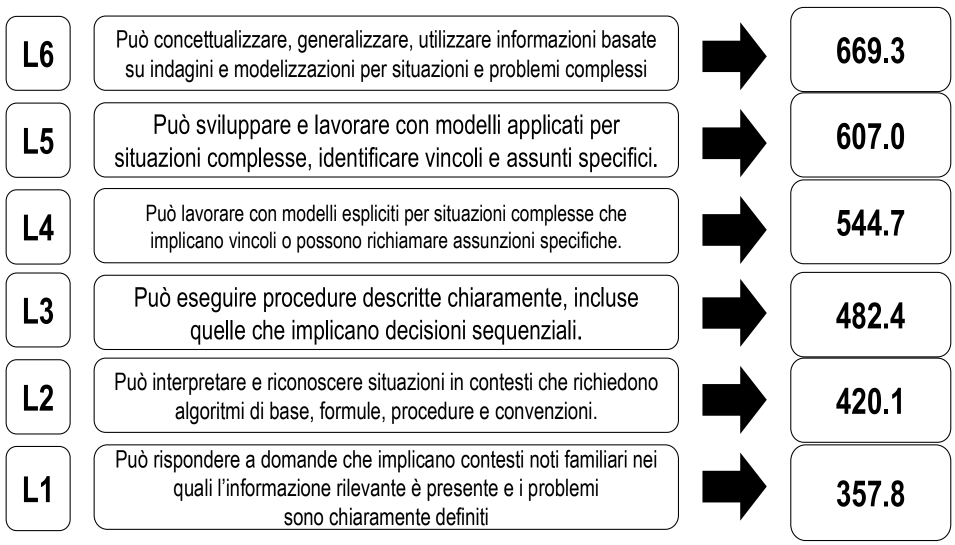
[8] Le competenze considerate sono le seguenti: pensare e ragionare, argomentare, comunicare, modellizzare, formulare e risolvere problemi, rappresentare, uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico delle operazioni, uso di sussidi e strumenti.

Per tali ragioni era necessario, in una prospettiva internazionale, rendere comprensibili le scelte valutative di fondo. La soluzione pensata è consistita nel descrivere raggruppamenti di competenza secondo il seguente criterio: la natura delle richieste cognitive che sono necessarie per risolvere i diversi problemi matematici.

Sei livelli di competenza

La struttura dei quesiti, in indagini complesse ed estese come PISA, possono avere un impatto considerevole sulle risposte degli allievi. Per tale ragione diventano particolarmente rilevanti i formati di domanda utilizzati nella costruzione dei quesiti (Gentile, 2008).

Figura 1 – *Descrizione sintetica dei sei livelli di padronanza della scala di matematica*



Adattato da: OECD (2007). PISA 2006. *Science competencies for tomorrow's world. Volume 1: Analysis*. Paris: OECD Publishing, p. 312.

PISA rileva la *literacy matematica* per mezzo di un insieme di quesiti a risposta aperta articolata, a risposta aperta univoca e a scelta multipla. Un numero pressappoco uguale di ciascun tipo di quesiti viene utilizzato nella costruzione degli strumenti di rilevazione.

Il formato a scelta multipla è in genere considerato il più adatto per i quesiti che intendono rilevare le competenze dei raggruppamenti della *riproduzione* e delle *connessioni*. I quesiti a risposta aperta articolata richiedono una risposta più lunga da parte dell'allievo. Tale risposta implica operazioni cognitive di livello superiore. Siamo dunque nel raggruppamento di competenza della riflessione: riflettere sui processi matematici richiesti mediante ragionamenti e uso consapevole del proprio sapere. Tali quesiti richiedono non soltanto di produrre una risposta, ma anche di rendere evidenti i passaggi eseguiti o di spiegare come si è giunti alla risposta. Con i quesiti a risposta aperta articolata l'allievo può di dimostrare il proprio livelli di *literacy* fornendo soluzioni a diversi gradi di complessità matematica.

La scala di valutazione è articolata su sei livelli. La Figura 1 riporta una descrizione essenziale di ciascun livello con il punteggio minimo associato.

Livelli di alfabetizzazione matematica in Italia

Nella Tabella 1 vengono presentati i risultati in matematica di alcuni Paesi Ocse (Gentile, 2008). In testa alla graduatoria si colloca la Finlandia (548 punti), seguita dalla Corea (547) e dall'Olanda (531). L'Italia, invece, è il primo Paese tra gli ultimi. Infatti, la sua media (462) che è nettamente inferiore alla media Ocse (498), le permette di superare unicamente Grecia (459), Turchia (424) e Messico (406).

Tabella 1- *Punteggio medio in matematica e differenze di genere*

	Maschi e Femmine	**Differenze di genere**		
	Punteggio medio	*Maschi*	*Femmine*	*Differenza (M - F)*
	Media	Media	Media	Differenza M-F
Finlandia	548	554	543	**12**
Corea	547	552	543	9
Olanda	531	537	524	**13**
Svizzera	530	536	523	**13**
Canada	527	534	520	**14**
Giappone	523	533	513	**20**
Nuova Zelanda	522	527	517	**11**
Belgio	520	524	517	7
Australia	520	527	513	**14**
Danimarca	513	518	508	**10**
Repubblica Ceca	510	514	504	11
Italia	462	470	453	**17**
Grecia	459	462	457	5
Turchia	424	427	421	6
Messico	406	410	401	**9**
OCSE media	498	503	492	**11**

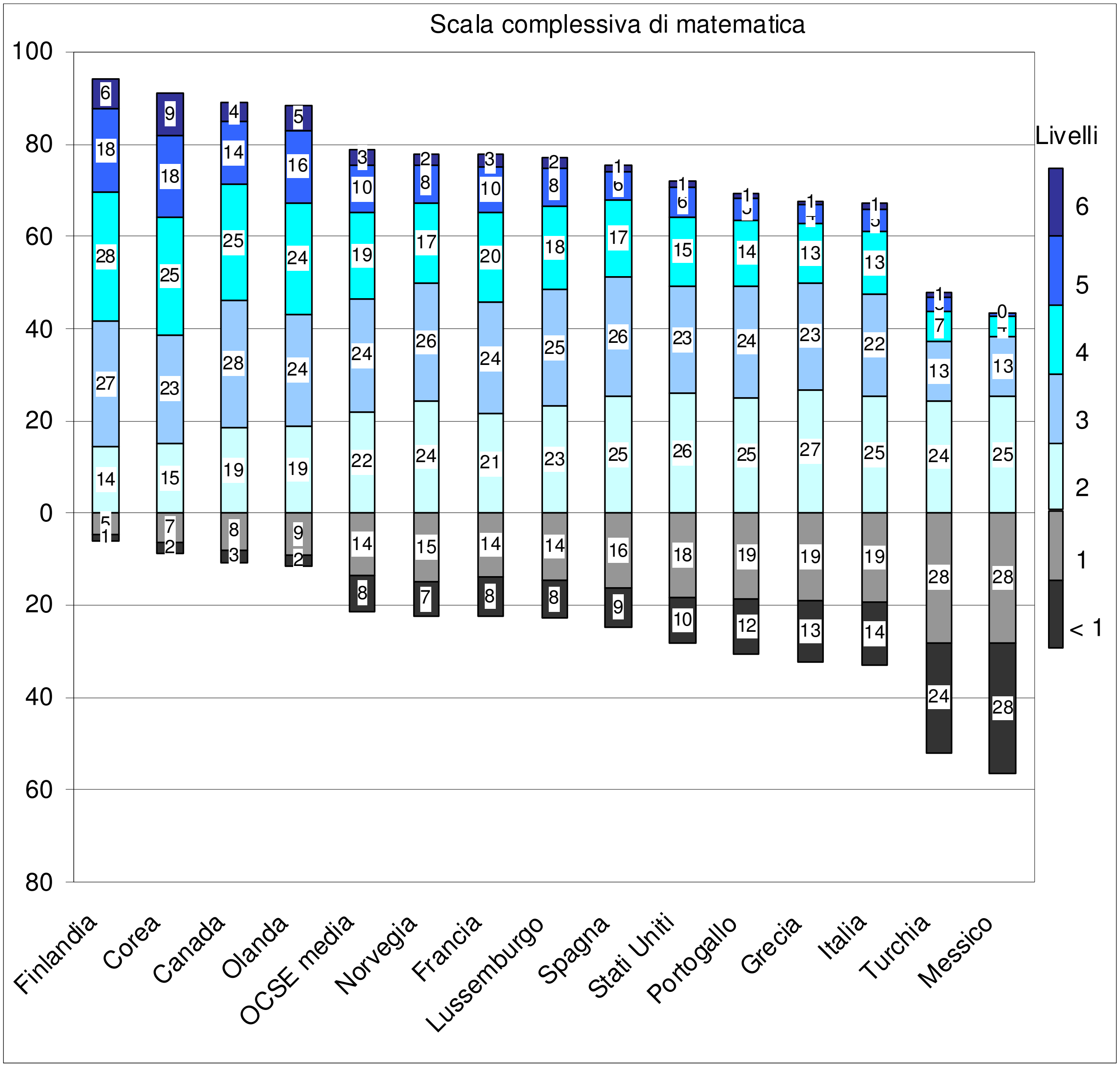
Nota: I valori statisticamente significativi sono indicati in grassetto. I punteggi sono stati arrotondati ai fini di una migliore leggibilità del dato.
Fonte: OCSE PISA 2006.

Per quanto concerne le differenze di genere, le prestazioni dei maschi sono superiori a quelle delle femmine. Fa eccezione l'Islanda; infatti, già in PISA 2003 le studentesse di questo Paese si erano dimostrate più brave dei loro compagni, non solo in lettura, ma anche in matematica. Inoltre, al contrario di quanto evidenziato in lettura, le differenze di punteggio tra i generi, questa volta a favore dei maschi, non sempre sono significative e, a volte, possono essere frutto del caso.

Variazioni nei livelli generali di *literacy matematica*

La Figura 2 indica il profilo delle prestazioni degli allievi italiani in ambito matematico (Gentile, 2008). Le barre sono allineate in corrispondenza del livello 2 in quanto, secondo il quadro di riferimento PISA, solo a partire da questo livello si evidenzia una competenza matematica sufficiente. È piuttosto evidente la differenza (di 50 punti) tra le percentuali dei livelli pari o inferiore a 1, cioè dell'insufficienza, di Finlandia (6%) e Messico (56%).

Figura 2 - *Percentuale di allievi a ciascun livello della scala generale di matematica*



Fonte:base dati OCSE Pisa2006/ Iprase del Trentino

In Italia (Tabella 2) circa 1/3 degli allievi del campione si situa al livello considerato dell'insufficienza (32,8%): 10 punti e più rispetto alla media OCSE (21,3). Nord Est (18,8%) e Trentino (17,8%) esprimono prestazioni migliori, inferiori alla media OCSE, ma lontanissime dalle prestazioni del Paese leader, la Finlandia (6%).

Tabella 2 - *Percentuale allievi ai livelli di insufficienza e di eccellenza nella scala di matematica*

	Livello pari o inferiore a 1 (insufficienza)	*Livello 6 (eccellenza)*
Italia	32,8	1,3
Media OCSE	21,3	3,3
Finlandia	6,0	6,3

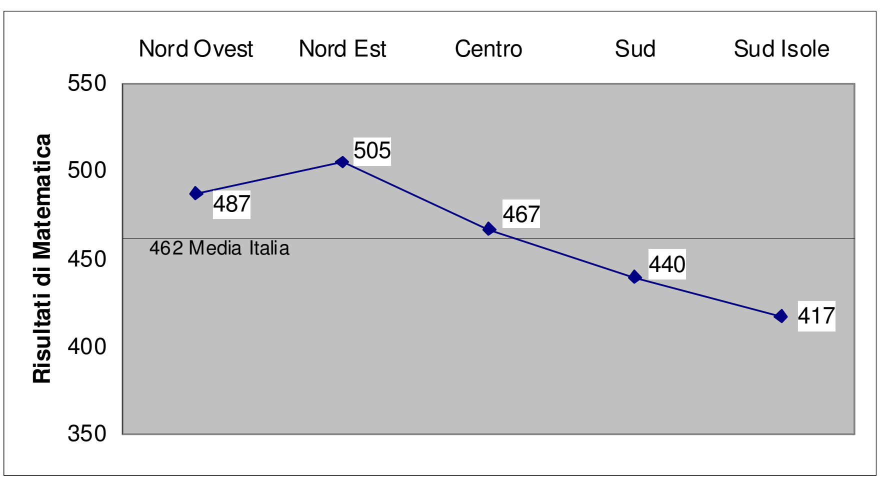
Fonte:base dati OCSE Pisa 2006

Nel campo dell'eccellenza, cioè del livello 6, il dato italiano è esiguo (1,3%), mentre media OCSE (3,3%), Nord Est (3,1%) e Trentino (3,5%) raggiungono risultati più o meno simili, comunque pari a circa la metà di quelli della Finlandia (6,3%).

Risultati per macro-aree geografiche e indirizzi scolastici

Si ripete ancora una volta lo schema di risultati osservato fino adesso nel campione italiano (Figura 3). Il Nord Est (505 punti) comprendente il Trentino (508) è ampiamente sopra la media italiana (462). Anche il Nord Ovest (487) ed il Centro (467) superano la stessa media, al contrario del Sud (440) e soprattutto del Sud Isole (417) che si situano fortemente al di sotto dell'Italia nel suo complesso. Le competenze nel paese seguono una direttrice geografica specifica: sono minime nelle isole, aumentano passando nelle regioni meridionali, crescono nel centro e nel Nord Ovest, raggiungono il massimo nel Nord Est.

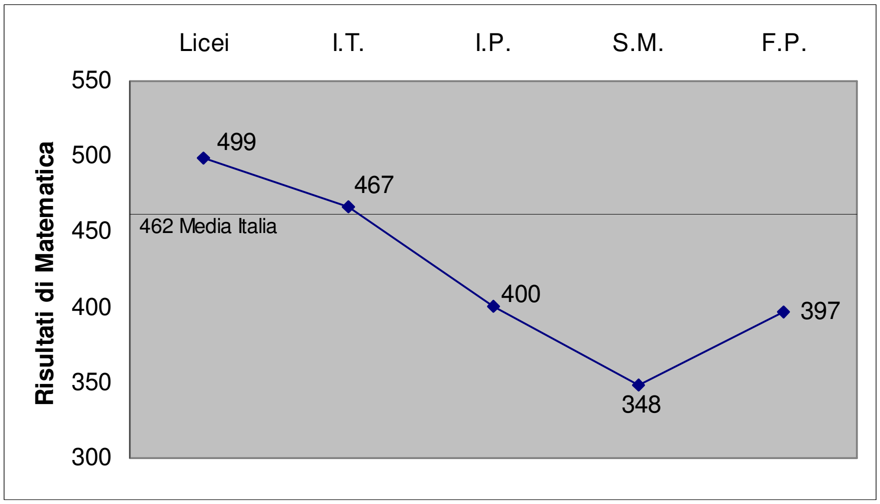
Figura 3 - *Punteggio medio di matematica, per area geografica*



Fonte:base dati OCSE PISA 2006

I Licei (499), precedono gli Istituti Tecnici (467), i quali, per matematica, ottengono una prestazione al di sopra della media italiana (462). Gli Istituti Professionali (440) e la Formazione Professionale (397) ottengono punteggi notevolmente inferiori all'Italia, ma, un po' sorprendentemente, quasi uguali tra loro. Segue, infine, la Scuola Media, il cui punteggio (348) è alquanto modesto (Figura 4).

Figura 4 – *Punteggio medio di matematica, per tipo di istruzione*



Fonte:base dati Fonte: OCSE PISA 2006

Guardando nel loro complesso le tendenze emerse, si potrebbe concludere che a un divario territoriale si associa anche un divario curricolare (Checchi e Braga, in stampa). Se, infatti, la media OCSE è per costruzione posta pari a 500 punti, l'Italia registra un valore medio pari a 462, preceduta dal Portogallo (466) e seguita da Grecia (459) e Israele (442). Tuttavia solo l'area del Nord-Est si colloca in linea con la media europea (497), con le punte di eccellenza collocate nei licei (basti ricordare che Cina, Finlandia e Corea, paesi in cima alla classifica sono rispettivamente a 549, 548, 547). Per contro l'area del Sud e Isole ha punteggi equivalenti a quelli di un paese in via di sviluppo: basti pensare che la Tailandia raggiunge 417. Oltre al divario territoriale si registra anche un consistente divario tra indirizzi scolastici: dai Licei del Nord Est ai Centri di Formazione Professionale delle isole c'è un divario di quasi due deviazioni standard. Persino le scuole del Brasile (370) o della Tunisia (365) hanno una performance migliore di questo segmento della scuola italiana (Tabella 3).

Tabella 3 - *Competenze matematiche per macro-area e tipologia di scuola*

Macro area regionale	Licei	Istituti Tecnici	Istituti Professionali	SS1G	Formazione professionale	Totale
Nord Ovest	531	495	429	385	374	487
Nord Est	548	521	432	426	425	505
Centro	509	462	407	324	n.d.	467
Sud	474	443	376	290	n.d.	440
Sud Isole	454	410	369	342	356	417
Totale	499	467	400	348	397	462

Nota: I punteggi sono stati arrotondati ai fini di una migliore leggibilità del dato.
Fonte OCSE-PISA 2006

Risultati per regioni e indirizzi scolastici

Checchi e Braga (in stampa) hanno provato a mettere in relazione i risultati di matematica per regioni e tipologie di indirizzi. Dai dati disponibili emerge che le performance migliori siano conseguite da una delle regioni a statuto speciale inclusa nel campione (*Friuli Venezia Giulia*), dalle due province autonome di Trento e Bolzano e dal Veneto (Tabella 4). Dall'analisi dei dati disaggregati secondo gli indirizzi di studio, si osserva chiaramente che in tutte le regioni, il livello di competenza è sistematicamente più elevato tra i Licei, seguita dagli Istituti Tecnici, dagli Istituti Professionali e infine dalle Scuole Secondarie di I° grado medie e dai Centri di Formazione Professionale.

Tabella 4 – *Competenze matematiche per regioni e tipologia di scuola*

Regioni	Licei	Istituti Tecnici	Istituti Professionali	Formazione Professionale	Totale
Basilicata	487	444	381	356	443
Bolzano	555	546	480	459	513
Campania	463	441	374	n.d.	436
Emilia Romagna	537	510	395	nd.	494
Friuli Venezia Giulia	542	529	447	n.d.	513
Liguria	506	483	416	386	473
Lombardia	534	502	437	374	487
Piemonte	535	481	416	n.d.	492
Puglia	476	432	390	n.d.	435
Sardegna	472	409	361	n.d.	429
Sicilia	463	411	366	n.d.	423
Trento	544	547	440	409	508
Veneto	558	524	452	416	510
Totale	**499**	**467**	**400**	**397**	**461.69**

Fonte: OCSE-PISA 2006.

Oltre la metà delle regioni italiane presenta livelli di competenza degli allievi liceali superiore alla media standardizzata OCSE (pari a 500). Gli Istituti Tecnici delle regioni del Nord, escluso il Piemonte, superano la media dei paesi OCSE. Muovendosi nelle stesse scuole delle regioni del Sud il livello di competenza si riduce significativamente. La tendenza media in termini di punteggi differenziali fa registrare un divario di -6,4% tra i quindicenni degli Istituti Professionali e quelli dei Licei, il gap si riduce in modo significativo nelle Provincia di Bolzano (-1.6%) e in Friuli Venezia Giulia (-2.3%). Nel quadro nazionale, emergono le differenze tra allievi dei Licei e dei Tecnici riscontrare in Provincia di Trento. Seppure la differenza sia solo nell'ordine dello 0.6%, esso rappresenta il solo caso di sorpasso tra la scuola tecnica e quella liceale.

Il divario di competenza cresce quando si passa agli Istituti Professionali i cui allievi, in media, possiedono un livello di competenza matematica inferiore del 14.6% rispetto agli iscritti degli Istituti Tecnici. Le differenze maggiori si riscontrano proprio nelle regioni del Nord: in Emilia Romagna (-22.5%) e nella Provincia di Trento (-19.7%). Le altre regioni invece presentano delle differenze poco distanti dalla media nazionale.

I risultati dell'indagine PISA 2006 confermano la forte carenza che gli allievi dei corsi triennali della Formazione Professionale hanno in ambito matematico. Il livello raggiunto è mediamente inferiore di circa 20 punti percentuali rispetto agli allievi dei Licei e di circa 15 rispetto agli allievi degli Istituti Tecnici. Sono da segnalare gli evidenti divari che si registrano nelle regioni del Nord dove raggiungono in Lombardia rispettivamente il -30% e il -25.6% e nella provincia di Trento entrambi circa di -25%. Nel contesto nazionale della Formazione Professionale, sono le due province autonome ad avere gli allievi migliori rispetto alle 6 regioni che partecipavano con un sotto-campione di 15enni dei corsi triennali. Va pur detto, come il punteggio medio delle scuole di Formazione Professionale di Trento e Bolzano sia superiore al punteggio raggiunto dagli Istituti Professionali di molte regioni centro-meridionali.

Il punto di vista di docenti e dirigenti

In una serie di lavori recenti, dedicati al tema della promozione de *successo formativo* nell'Istruzione e nella Formazione Professionale, sono emerse con molta chiarezza le sistematiche difficoltà di apprendimento degli allievi degli istituti professionali e de i corsi triennali della formazione professionale, soprattutto nell'area dei saperi di base (Cusinato, 2007; Gentile *et. al,* 2006; Gentile e Tacconi, 2007; Tacconi, 2007; Favaretto e Salatin, 2007). I ricercatori hanno messo in luce i seguenti fenomeni[9].

Il problema degli esiti deficitarii

Per quanto nelle esperienze di formazione professionale monitorate si stiano notando dei risultati positivi, il problema degli esiti deficitarii rimane. I docenti un progressivo impoverimento nei livelli di "alfabetizzazione strumentale", nelle condotte comportamentali, nell'interesse e nella motivazione. Per quanto riguarda gli aspetti cognitivi i docenti dichiarano che «*il livello minimo con cui arrivano all'inizio del triennio, non è neanche quello delle scuole elementari*». Osservano difficoltà di astrazione («*uno dei problemi più grossi che hanno è il collegamento tra il sapere e la realtà quotidiana, cioè vedono due cose staccate, slegate*»), grosse lacune nelle competenze strumentali di base («*non sanno fare i conti, non sanno parlare, non sanno leggere*»), «*problemi di apprendimento*» («*io non capisco*», «*non capisco*», «*non capisco*»). Si assiste ad uno «*disfacimento dei cervelli a livello logico, nel senso che i piani logici i ragazzi al giorno d'oggi fanno molto fatica*».

Riguardo gli aspetti comportamentali i docenti rilevano problemi di «*concentrazione*», di auto-controllo («*non stanno fermi sulla sedia, tirano il martello, si alzano, vanno a picchiare l'altro, corrono*»), e di comportamento («*non sanno stare in aula, quindi*

[9] I due paragrafi successivi sono tratti da: Gentile, M. et. al. (2006). *L'indagine sul successo formativo.* Progetto Resfor: Resoconto di Ricerca. Milano: Rete per il successo formativo, ID 274450. Azione 2: Ricerca, analisi e studio ID 278161. CNOS-FAP, FSE, Ministero del Lavoro e delle Politiche Sociali, Regione Lombardia (pp. 133-137). Il piano di raccolta dati è basato sull'uso di tecniche di tipo qualitativo e quantitativo. Sono stati svolti 6 *focus group* per un totale di 53 soggetti intervistati, 11 interviste a testimoni privilegiati e somministrato un questionari per l'auto-analisi dei processi organizzativi e didattici a 109 docenti. I dati sono basati su un total di 173 soggetti che operanti in scuole e centri dell'interland milanese.

chiacchierano, disturbano, saltano, si picchiano, si distraggono in continuazione, hanno bisogno di attenzione»).

Da un punto di vista motivazionale con i più problematici non c'è speranza: «"*che cosa m'interessa conoscere le equazioni di secondo grado, quando vado al supermercato a fare la spesa", e non c'è speranza, cioè non proprio*». Un altro docente racconta la sua disarmante osservazione: «*sei apatico, giri in fondo, per cui non sa neanche che cosa si sta facendo, qualsiasi cosa io dica, qualsiasi cosa cerchi di fare, non se ne frega assolutamente nulla"»*. Quest'ultima, esemplificata dal docente, è una situazione-limite, ovvero dopo «*aver fatto qualsiasi cosa sicuramente non avrei ricavato di più*». L'abbondanza di opzione, e una relativa tendenza ad auto-determinare scelte, rende il percorso scolastico accidentato. I ragazzi collezionano ripetuti fallimenti, arrivando ai CFP, nella condizione di "scarto dal sistema". Hanno l'idea di «*andare a fare cose più semplici*», ma in realtà non è più così, perché «*bisogna avere intelligenza pratica, essere portati, avere manualità, ecc.*». Sembra che i docenti coltivino l'aspettativa che, cosi come a scuola, anche nei centri di formazione, sarebbe opportuno arrivare con delle "attitudini conformi": *«una volta per esempio la meccanica, formazione professionale, arrivavano tutti ragazzini di famiglia medio povera che volevano imparare a far il meccanico per lavorare e fare il meccanico»*. Dunque, nell'evocare il passato si guarda ad una condizione (motivazionale) in ingresso che non potrà più verificarsi: «*le classi erano totalmente diverse*», «*il problema molto spesso è questa mancanza d'interesse, che è la cosa più tragica, proprio perché probabilmente non vengono a scuola con le stesse motivazioni di 30–40 anni fa»*. Questo atteggiamento generale e poi osservato anche nello specifico delle discipline: «*io non insegno la materia più amata dai ragazzi* (chimica n.d.r.), ..., *tra tutte le materie, la prima che eliminerebbero è quella, perché proprio non la ritengono utile*». I ragazzi spiegano i loro fallimenti attribuendoli a cause esterne incontrollabili ("*è troppo difficile*"), o ad una mancanza di volontà ("*non ho voglia*"). Questo si evidenzia anche in occasione di compiti molto semplici: «*anche solamente ricopiare l'istogramma sul foglio è difficile*».

La rappresentazione delle cause

Analizzando le dichiarazioni rilasciate dai docenti intervistati si ha l'impressione che molti partecipanti fatichino a distaccarsi da una sorta di concezione deterministica e dal senso di impotenza che ne deriva. È l'idea che sembra implicita in espressioni di questo tipo:

- *«Tante volte le problematiche che alle volte ti ritrovi con un ragazzo di prima superiore, sono le problematiche che la scuola ti aveva già segnalato alla scuola materna»;*
- *«quest'anno c'è un ragazzino che non capisce assolutamente niente, ma proprio niente! È lì, vegeta, non capisce niente!... questo ragazzino è destinato alla bocciatura!»*
- *«...la famiglia si vergogna di avere un figlio che potrebbe essere definito non intelligente, diciamo così, per non dire stupido. È un senso di vergogna, un non voler confrontarsi con la realtà»;*
- *«Questo, purtroppo, è il materiale umano di cui siamo forniti...»*

Nella ricerca delle cause, una parte di responsabilità è attribuita ai genitori, una parte al diritto all'istruzione, e infine alla scarsa incidenza della scuola primaria sugli apprendimenti di base. […] I genitori si sostituiscono ai figli, oppure scelgono, questo è il caso delle scuole salesiane, non in base ai contenuti del curricolo, quanto a ciò che offre l'ambiente: accoglienza, funzionamento, sicurezza. Prevale, poi, in due docenti, una visione disincantata del diritto all'istruzione (e/o formazione). Appare di nuovo l'evocazione di un passato ormai lontano («*Una volta i ragazzi andavano a scuola perché desideravano andare a scuola*») associata all'idea che gli allievi siano dei "forzati con diritto d'istruzione": «*hanno diritto ad andare a scuola, sono mandati a scuola, è una punizione data dai genitori, dalla società di andare a scuola*», «*La scuola è una sofferenza, una prigione*», «*evidentemente i ragazzi la vivono come una sofferenza*». Questo determina un progressivo aumento del numero di allievi che manifestano un atteggiamento negativo verso la scuola. Una terza causa è da ricercare nei fallimenti educativi della scuola primaria. Un docente afferma: «*io dico che dipende dalle scuole elementari che non gli insegnano più a calcolare*».

Buona parte degli intervistati attribuisce le cause al contesto sociale dando un peso consistente alla famiglia. Per quanto riguarda il contesto sociale si sottolineano come elemento critico in particolare lo "stile di vita"e la "crisi di valori"che questo manifesta. Si sottolinea anche il mancato riconoscimento del valore sociale della scuola; diventano maggiormente influenti altri valori: profitto, successo... Per quanto riguarda la famiglia, si denuncia in particolare la difficoltà di costruire con essa un rapporto di collaborazione: i genitori vengono visti come eccessivamente protettivi e indulgenti nei confronti dei propri figli («*...non c'è quel rigore, quell'abitudine alla fatica che, purtroppo, fa parte della realtà quotidiana e non solo scolastica: Se prendi 5, va bene lo stesso»*) o comunque poco propensi a riconoscere eventuali problemi esistenti. Anzi talvolta, a questo riguardo, le famiglie metterebbero in atto vere e proprie strategie di rimozione:

- negando o nascondendo le difficoltà del figlio («*Fan finta che il bambino sia a posto, senza nessun problema»*),
- ostacolando il passaggio alla scuola di informazioni che potrebbero essere utili per inquadrare il tipo di difficoltà o
- rifiutando risolutamente di farsi aiutare («*No, mio figlio non lo porto da nessuna parte!»*), soprattutto quando l'aiuto assume la forma di un ri-orientamento («*No, mio figlio deve fare il liceo!»*).

Anche i dirigenti sottolineano il ruolo problematico della famiglia. A loro avviso è notevole l'incidenza della famiglia soprattutto quando prevalgono assenze e divisioni. *Tra i dirigenti (n.d.a*) sono state raccolte queste dichiarazioni;

- *«tra le cause maggiori (di insuccesso) penso sia il disagio familiare: su 80 ragazzi che ho penso che solo 10 hanno una situazione normale di famiglia alle spalle, per cui questo incide fortemente nell'apprendimento»;*
- *«abbiamo almeno un 50% di alunni provenienti da situazioni familiari complesse: affidi, ragazzi seguiti dai servizi sociali».*

La sottolineatura dell'influenza che le problematiche sociali hanno sullo sviluppo adeguato delle competenze di base negli allievi si accompagna spesso all'affermazione delle inadeguate competenze degli insegnanti nell'affrontare queste problematiche: «*..mentre cito queste... grosse problematiche (società, famiglia, valori), mi rendo conto che come insegnante, laureata in lettere e abilitata, mi mancano le competenze ed anche gli strumenti per affrontare questi problemi»*).

Per Dario Nicoli*, «...la causa del mancato apprendimento dei saperi fisici e matematici da parte di un intero popolo è il processo di progressiva astrazione delle discipline, la didattica astratta delle discipline. Finché reggeva il principio di autorità, la persona che non capiva si sforzava, oppure si ritirava in un angolo ed accettava di essere stigmatizzata come incapace in matematica. Adesso, che non esiste più un principio di autorità, la gente ti manda "a quel paese", cioè dice: "Non capisco niente! Mi stai dicendo delle stupidaggini, non ti ascolto più...". È stato estenuato un metodo verso l'astrazione e questo comporta... che, invece che insegnare, tale* *metodo impedisce l'apprendimento, cioè crea barriere, produce resistenze all'apprendimento; sembra che il come si insegna matematica sia fatto apposta perché la gente non la impari o odi la matematica»*. La questione non si pone in modo molto diverso in altri ambiti*: «Se fai degli studi su quanti libri leggono i ragazzi dopo aver fatto 8-13 anni di scuola, constateresti che il 90% non legge più un libro nella propria vita; se misuriamo su questo il successo dell'insegnamento della lingua italiana e della letteratura italiana, siamo proprio vicini al fallimento».*

Per i dirigenti, tra le cause che condizionano il risultato scolastico/formativo individuano la povertà culturale, la mancanza di motivazione, la frammentarietà dell'attenzione.

- *«vedo che c'è una grande fragilità culturale nei ragazzi …e non hanno molta continuità nello studio»;*
- *«la seconda difficoltà è la povertà culturale che si portano dietro come bagaglio anche dagli anni precedenti»;*
- *«la causa maggiore che io vedo nei ragazzi di oggi è di tipo culturale, cioè un'attenzione molto frammentata, un ragionare per immagini, una difficoltà alla concentrazione e alla continuità nella fatica intellettiva»;*
- *«noto sicuramente la difficoltà di concentrazione, di impegno e di continuità»;*
- *«l'85% sono deboli e con ritardi scolastici»;*
- *«scarsa motivazione dell'impegno scolastico intellettuale. Perchè devo studiare? Cosa servono queste materie?»;*
- *«Nel 2005 è stato calcolato che al 15% dei ragazzi quindicenni dei paesi OCSE la scuola non interessa; penso che negli Istituti professionali o nei centri professionali questo dato rappresenti quasi il 90%».*

PER UNA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Come dimostrano le indagini internazionali, e come in parte hanno reso evidenti gli approfondimenti qualitativi appena presentati, sembra del tutto ragionevole concludere che il livello di alfabetizzazione matematica degli allievi dei corsi di formazione professionale possa essere posizionato in una fascia di rendimento che in termini di anni di scolarizzazione possiamo stimare nell'intervallo tra la quinta classe di scuola primaria e il triennio di SS1G. Se questo è vero, la matematica per molti ragazzi può costituire una delle componenti più complesse del loro percorso di istruzione e formazione, può determinare vissuti non favorevoli e, infine, rendere frustranti buona parte degli sforzi che i giovani e i docenti possono mettere in campo per l'apprendimento della conoscenza matematiche.

Fortunatamente, negli ultimi vent'anni la ricerca ha individuato e convalidato una serie di pratiche didattiche che potrebbero aiutare gli allievi con difficoltà di apprendimento in matematica a comprendere e utilizzare la matematica in modi significativi. Scopo di questa parte dello scritto è presentare le linee guida didattiche che si sono dimostrate efficaci per costruire la conoscenza concettuale, procedurale e dichiarativa di ordine matematico (Miller e Hudson, 2007).

Procedure dirette per l'insegnamento della matematica[10]

Le prime ricerche a dimostrare l'efficacia dell'insegnamento diretto della matematica risalgono a circa trent'anni fa (Good e Grouws, 1979). Tale approccio prevede una sequenza di insegnamento che parte da un organizzatore anticipato (ripasso delle conoscenze prerequisite, comunicazione dell'obiettivo della lezione e dell'utilità di apprendere il contenuto specifico) seguito da una dimostrazione da parte dell'insegnante, dalla pratica guidata (ovvero un graduale passaggio di responsabilità, nella risoluzione dei problemi matematici, dall'insegnante all'allievo), dalla pratica autonoma e dalle verifiche di mantenimento degli apprendimenti.

Le principali strategie di insegnamento di cui la modalità diretta si avvale sono la presentazione delle nuove informazioni in piccoli blocchi, l'uso di esempi e «non-esempi», la pratica costante e strutturata per promuovere la padronanza. Le fasi di dimostrazione e pratica guidata sono caratterizzate da un'assidua interazione verbale tra il docente, che pone domande, e gli allievi, che rispondono, dal continuo monitoraggio della prestazione degli allievi e dal sistematico feedback, positivo e correttivo, da parte dell'insegnante (Rosenshine, 1995).

Alcuni insegnanti si domandano se un approccio messo a punto trent'anni fa sia ancora attuale, soprattutto alla luce dei movimenti di rinnovamento dell'insegnamento della matematica (D'Amore e Sbaragli, 2006). A questo proposito, recenti meta-analisi confermano sistematicamente l'efficacia delle

---

[10] Il paragrafo è una rielaborazione parziale del seguente articolo: Miller, S.P. & Hudson, P.J. (2007). *Using evidence-based practices to build mathematics competence related to conceptual, procedural, and declarative knowledge.* «Learning Disabilities Research and Practice», Vo. *22,* n. 1, pp. *47-57.*

procedure di insegnamento diretto con gli allievi con difficoltà di apprendimento in ambito matematico. Ad esempio, Kroesbergen e Van Luit (2003) hanno rilevato che, per l'apprendimento delle abilità matematiche di base, questa modalità era più efficace delle «nuove» strategie promosse dalla riforma. In un'altra meta-analisi, Swanson e Hoskyn (2001) hanno osservato che «gli studi che includevano componenti connesse alla modalità diretta di insegnamento mostravano dimensioni dell'effetto maggiori rispetto agli studi che utilizzavano modalità differenti» (p. 113). Considerate le caratteristiche degli allievi con difficoltà di apprendimento matematico (deficit di memoria, difficoltà a concentrare l'attenzione sugli elementi chiave del compito, atteggiamento passivo) questi risultati non sorprendono.

Per aiutare gli allievi a prestare attenzione e concentrarla opportunamente, è necessario che l'insegnante presenti il materiale in piccoli blocchi, faccia la dimostrazione delle strategie per risolvere i problemi matematici e fornisca la pratica e il feedback necessari perché gli allievi possano acquisire accuratezza e scorrevolezza (Mercer e Miller, 1991-1994). L'uso di questo metodo è indicato per sviluppare la conoscenza matematica di tipo concettuale, procedurale e dichiarativo (Hudson e Miller, 2006).

Sviluppare la conoscenza concettuale

La *conoscenza concettuale* viene definita come «una rete integrata di informazioni nella quale le relazioni di collegamento hanno la stessa importanza delle unità di informazione che esse connettono» (Goldman *et al.,* 1997, p. 4). Il processo di collegamento può coinvolgere due concetti matematici che l'allievo ha appreso in precedenza e immagazzinato in memoria (Goldman et al., 1997). Ad esempio, un allievo può sapere che l'addizione consiste nell'unire due gruppi per ottenerne un terzo più grande e che la sottrazione consiste nel partire da un gruppo più grande, togliere alcuni elementi e ottenere un gruppo più piccolo. La conoscenza concettuale dell'allievo cresce quando riconosce l'esistenza di una relazione tra l'addizione e la sottrazione (ovvero che le stesse quantità utilizzate in un problema con l'addizione possono essere usate per rappresentare un problema con la sottrazione). Un'applicazione pratica di questa conoscenza concettuale può essere quella con cui l'allievo comprende che, se un imprenditore prende 40.000 euro dal capitale sociale, di 100.000 euro, per pagare i fornitori, dovrà rimetterne 40.000 per ritornare al suo fondo originario (cioè 100mila – 40mila = 60mila e 60mila + 40mila = 100mila).

Un altro tipo di collegamento che si realizza quando gli allievi sviluppano la conoscenza concettuale è quello tra i concetti di nuova acquisizione e quelli appresi in precedenza e immagazzinati in memoria (Goldman *et al.,* 1997). Ad esempio, un allievo può conoscere il concetto di maggiore e minore in termini di quantità di oggetti (ad esempio cinque fori su un asse di legno eseguiti con una punta di 10mm sono maggiori in termini di numero e di ampiezza di tre fori eseguiti con una punta di 8,5mm) e successivamente collegare questa conoscenza a un concetto nuovo, come ad esempio la misura dei liquidi (ad esempio, un litro di refrigerante per auto-vetture di grossa cilindrata è maggiore di un quarto dello stesso liquido di cui deve disporre una *city car*).

La conoscenza concettuale implica una consapevolezza profonda connessa al significato della matematica. Un concetto (ovvero una categoria o classe nella quale si possono raggruppare idee e quindi tipi di problemi) presenta caratteristiche costanti. Man mano che gli allievi iniziano a riconoscere queste caratteristiche, sono maggiormente in grado di generalizzare i propri apprendimenti a situazioni e contesti differenti (Kame'enui e Simmons, 1990). Ad esempio, una volta che gli allievi hanno compreso il concetto di conversione del denaro (ad esempio 10 biglietti da 20 euro sono = 200 euro, 20 da 10 euro sono = 200 euro, che 4 da 50, 2 da 100 sono = 200 euro), sono in grado di effettuare acquisti di ordine superiore a prescindere dalle specifiche banconote di cui dispongono.

Il successo in matematica, sia dentro che fuori la scuola, dipende in gran parte dalla conoscenza concettuale, poiché questo tipo di conoscenza è essenziale per gestire i problemi nuovi in una varietà di contesti (Hudson e Miller, 2006). Perciò, è molto importante sviluppare le lezioni di matematica avendo attenzione di includere l'insegnamento diretto necessario alla comprensione del significato delle varie abilità che gli allievi devono acquisire.

Metodi per sviluppare la conoscenza concettuale

Le meta-analisi della letteratura (Kroesbergen e Van Luit, 2003) evidenziano effetti positivi dell'uso di materiali di manipolazione e di rappresentazioni visive nell'insegnamento della matematica. L'uso delle rappresentazioni visive è particolarmente indicato per aiutarli a sviluppare la conoscenza concettuale. Un metodo sistematico per integrare l'uso di materiali di manipolazione e di rappresentazioni visive nell'insegnamento diretto è la sequenza didattica che va dal *Concreto* al *Rappresentato* all'*Astratto* (CRA).

La sequenza CRA parte dall'insegnamento al livello concreto, con l'utilizzo di materiali di manipolazione per rappresentare il concetto oggetto della lezione. Dapprima l'insegnante usa questi materiali per illustrare il concetto e risolvere problemi relativi ad esso. Dà quindi agli allievi la possibilità di esercitarsi, con la sua guida e in maniera autonoma, nel loro uso.

Quando gli allievi hanno acquisito padronanza nel loro utilizzo (ad esempio 80% di risposte corrette a problemi risolti autonomamente), l'insegnamento passa al livello della rappresentazione, che coinvolge l'uso di immagini di oggetti e/o icone per rappresentare il concetto in questione. Di nuovo, le immagini e/o le icone vengono utilizzate dall'insegnante nella sua dimostrazione e dagli allievi nella pratica dapprima guidata e poi autonoma. La ricerca ha rilevato che tre interventi didattici (o lezioni) al livello concreto (con l'uso di materiali di manipolazione) e tre al livello di rappresentazione (con l'uso di immagini e/o icone), in cui in ogni intervento siano svolti circa 20 problemi, sono sufficienti, per molti allievi con difficoltà in matematica, per acquisire un concetto (Butler, Miller, Crelian, Babbitt e Pierce, 2003). Una volta raggiunta la padronanza al livello di rappresentazione (ad esempio 80% di risposte corrette a problemi risolti autonomamente), l'insegnamento procede al livello astratto, che consiste nel risolvere problemi numerici senza l'uso di materiali di manipolazione né immagini.

La sequenza CRA si è dimostrata efficace per aiutare gli allievi a padroneggiare una varietà di abilità matematiche richieste, e in particolare:

- le abilità algebriche
- i fatti aritmetici[11]
- l'uso del denaro
- le frazioni
- le moltiplicazioni
- il valore posizionale delle cifre.

Indipendentemente dal contenuto matematico specifico oggetto di insegnamento, la letteratura relativa allo sviluppo della conoscenza concettuale suggerisce una serie di linee guida, per la didattica, mirate ad aumentare l'efficacia e l'efficienza dell'insegnamento.

Linee guida per sviluppare la conoscenza concettuale

Quando l'obiettivo dell'insegnamento della matematica è aiutare gli studenti a comprendere il significato delle procedure che stanno apprendendo o dei concetti presentati nella lezione, è importante fornire varie modalità di rappresentazione. L'utilizzo della sequenza CRA garantisce che ì concetti siano insegnati con rappresentazioni sia tridimensionali (i materiali di manipolazione) sia bidimensionali (le immagini).

È utile anche variare i materiali di manipolazione e le immagini usati (Mercer e Mercers, 2005). Ad esempio, quando si insegna il concetto di addizione, agli allievi viene spiegato che sommare significa unire due gruppi di oggetti e contare il nuovo insieme complessivo. La prima lezione concreta può prevedere l'uso di cubi, la seconda di serpentine idrauliche e la terza di viti, così che gli studenti imparino che non si sommano soltanto i cubi. Le lezioni al livello di rappresentazione possono fare uso di immagini di quadrati, poi di cubi, e poi di simboli (Miller e Mercer, 1991).

Nella scelta delle modalità di rappresentazione è importante considerare le caratteristiche degli allievi. Ad esempio, è importante selezionare materiali di manipolazione appropriati all'età (ad esempio, contare macchinine per gli alunni della scuola primaria e CD musicali per quelli della secondaria). Lo stesso vale per la scelta delle immagini al livello di rappresentazione. Inoltre, occorre considerare le abilità fino-motorie degli allievi: per quelli con deficit in quest'area, sarà necessario optare - al livello concreto - per oggetti più grandi e - al livello di rappresentazione - prevedere, sui fogli per lo svolgimento dei compiti, più spazio a disposizione per disegnare le immagini.

Un'altra importante linea guida relativa all'insegnamento dei concetti riguarda la scelta di una struttura di apprendimento (confronto, esempio/non-esempio, passo per passo) per rappresentare il concetto in questione (Hudson e Miller, 2006).

Il confronto (Bulgren et al., 1995) viene usato quando risulta utile, per illustrare il concetto, identificare somiglianze e differenze. Ad esempio, supponiamo di

[11] Per fatti aritmetici s'intendono numeri memorizzati con tabelline e altre operazioni che permettono di accedere ai risultati senza passare attraverso la soluzione procedurale degli stessi. I fatti aritmetici sono i risultati di particolari operazioni che sono stati memorizzati e che possono essere recuperati facilmente in base alle richieste del compito. In genere riguardano i risultati delle tabelline e delle altre operazioni come ad esempio: 3x5, 10+8, 20:2, 12–4.

essere all'interno di un corso per futuri addetti alla ristorazione, quando si insegna il concetto di frazioni equivalenti al livello concreto, si possono sovrapporre fette di torta, a spicchio, per stabilire se due frazioni siano uguali. Se una fetta che rappresenta 1/4 viene posta sopra una fetta che costituisce 1/2, gli studenti vedono che 1/4 e 1/2 non sono equivalenti perché il pezzo da 1/4 non copre completamente quello da 1/2. Mettendo invece due fette, ciascuna rappresentante 1/4, sopra a quella che rappresenta 1/2, gli studenti possono stabilire che 2/4 e 1/2 sono equivalenti perché hanno la stessa grandezza. La struttura del confronto può essere utilizzata anche quando l'insegnamento passa alle rappresentazioni grafiche, fornendo due immagini che rappresentino parti frazionarie ed effettuando comparazioni visive per stabilire se siano equivalenti o meno.

La struttura *esempio/non-esempio* viene utilizzata quando, per illustrare il concetto, è necessario operare discriminazioni sottili (come nel caso del riconoscimento di figure geometriche). Ad esempio, quando si insegna il concetto di rettangolo al livello concreto, si possono mostrare agli allievi blocchi colorati; inizialmente l'insegnante li nomina man mano che li presenta, alternando una varietà di forme, e successivamente chiede agli studenti di identificarle e nominarle, di volta in volta, correttamente. Quando si insegna il concetto al livello di rappresentazione, si possono presentare agli studenti varie immagini di forme geometriche invitandoli a contrassegnare quelle che sono rettangoli o a cancellare quelle che non lo sono.

La struttura *passo per passo* viene usata quando, per illustrare il concetto, è necessario compiere una serie di fasi sequenziali. Ad esempio, quando si insegna il concetto costruzione di solidi al livello concreto e di rappresentazione, si possono usare cubi o immagini di cubi accompagnati dai passi specifici per lo svolgimento dell'operazione. Similmente, quando si insegna il concetto di moltiplicazione al livello concreto e di rappresentazione, si possono usare piatti di carta e cubi e immagini di piatti di carta e cubi accompagnati dai passi specifici per lo svolgimento dell'operazione.

Nelle Figura 5 e 6 sono forniti alcuni esempi delle strutture descritte.

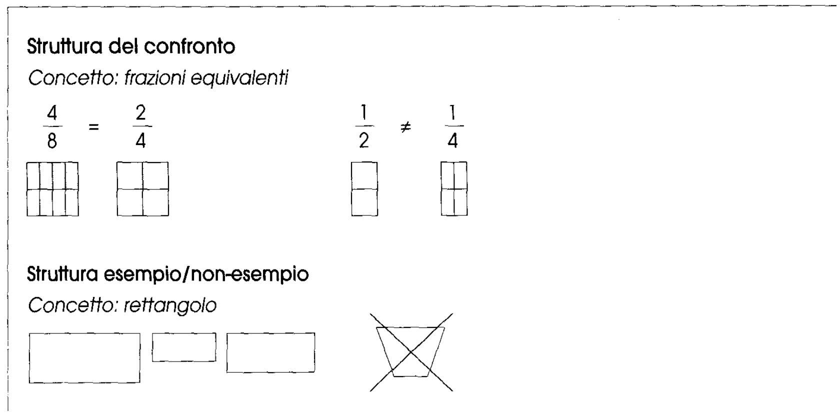
Sviluppare la conoscenza procedurale

Il secondo tipo di conoscenza che gli studenti devono acquisire per diventare competenti in matematica è la *conoscenza procedurale,* cioè la capacità di eseguire una sequenza di passi per risolvere un compito matematico (Bottge, 2001). Essa viene utilizzata per risolvere i problemi sia di calcolo, sia verbali, sia reali, come controllare il resto o calcolare l'area di una stanza.

Metodi per sviluppare la conoscenza procedurale

Ricerche sullo sviluppo della conoscenza procedurale sono state compiute nelle aree della risoluzione dei problemi verbali e dei problemi di calcolo o algoritmi. Montague, Applegate e Marquard (1993) hanno realizzato studi ampi sugli effetti di una strategia cognitiva e metacognitiva sulle prestazioni di adolescenti con difficoltà di apprendimento nella risoluzione di problemi. La strategia si componeva di sette fasi cognitive - *leggere, parafrasare, visualizzare, fare ipotesi, fare una stima, calcolare, controllare* - e tre metacognitive: *dire, chiedere, controllare.* Gli studenti hanno utilizzato efficacemente la strategia per risolvere i problemi verbali, sebbene si sia reso necessario un ripasso periodico per il mantenimento dell'abilità.

Figura 5 – *Esempi di strutture di apprendimento: confronto, esempio/non esempio*



Case, Harris e Grabam (1992) hanno messo a punto e proposto con successo una strategia a cinque fasi (leggi il problema ad alta voce, cerca le parole importanti e sottolineale, fai un disegno che mostri la situazione, scrivi l'operazione matematica, scrivi la risposta) che includeva una componente di autoistruzione per aiutare gli allievi a risolvere problemi verbali che implicavano l'addizione e la sottrazione. L'insegnamento si è svolto in otto passi:

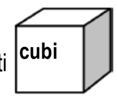
1. sviluppo delle abilità prerequisite;
2. discussione con gli studenti con feedback sulle prestazioni, descrizione della strategia, richiesta di impegno nel suo uso;
3. presentazione e discussione della strategia;
4. dimostrazione della strategia e delle autoistruzioni;
5. sviluppo della padronanza nelle diverse fasi della strategia;
6. pratica guidata;
7. pratica autonoma;
8. generalizzazione e mantenimento.

Nell'area dei problemi di calcolo, Brown e Frank (1990) hanno proposto la «strategia delle 4 B» *(Begin, Bigger, Borrow, Basic facts:* inizio, maggiore, prestito, fatti aritmetici) per insegnare ad alunni della scuola primaria a svolgere operazioni di sottrazione che richiedevano il raggruppamento. Un'insegnante faceva la dimostrazione della strategia e gli alunni dovevano memorizzarla prima di iniziare a esercitarsi. Durante l'esercitazione, le fasi della strategia erano riportate sul foglio del compito, così che gli alunni potessero farvi riferimento per monitorare la propria prestazione. In un altro studio, Rivera e Smith (1988) hanno insegnato ad allievi con difficoltà di apprendimento della matematica della scuola secondaria di primo grado a risolvere le divisioni con numeri elevati utilizzando una strategia a sette fasi (metti il punto, dividi, moltiplica, sottrai, porta sotto, ripeti e porta sopra il resto). Per aiutare gli studenti a ricordare le fasi della strategia e ad attuarle correttamente, sono state utilizzate delle parole chiave. La dimostrazione della strategia da parte dell'insegnante era seguita dall'imitazione (pratica guidata) e quindi dalla pratica autonoma.

Figura 6 – *Esempi di strutture di apprendimento: passo per passo*

Struttura passo per passo

Concetto: costruzioni di solidi usando cubi

1° passo: guarda la Figura A e conta quanti di questi 

contiene

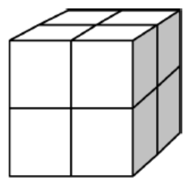


Figura A

2° passo: guarda il solido pieno disegnato nella Figura B e conta altrettanti cubi

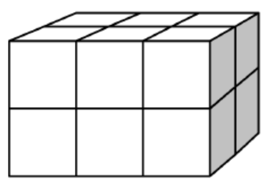


Figura B

3° passo: conta tutti i cubi presenti nel solido della Figura A e B, e stima di quanti cubi avresti bisogno per costruire la Figura C

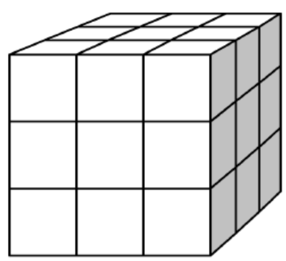


Figura C

Indipendentemente dal fatto che il compito matematico sia un problema verbale o di calcolo, l'insegnamento rivolto a sviluppare la conoscenza procedurale presuppone una strategia chiara e ben definita: di seguito sono suggerite alcune linee guida per svilupparla.

Linee guida per sviluppare la conoscenza procedurale

Per creare o adattare una strategia procedurale vanno tenute presenti cinque linee guida (Hudson e Miller, 2006). Primo, la strategia dovrebbe prevedere una sequenza di passi che conducano alla soluzione del problema. Secondo, i passi della strategia dovrebbero essere generalizzabili, cioè essere applicabili efficacemente a tutti gli esempi di un certo tipo di problema (ad esempio due cifre + due cifre con raggruppamento). Terzo, ogni passo della strategia dovrebbe indicare allo studente di compiere un'azione concreta (ad esempio scrivere la risposta), di fare un'operazione cognitiva o metacognitiva (ad esempio parafrasare oralmente il testo del problema) o di applicare una regola (ad esempio usare la regola dell'arrotondamento). Quarto, i passi della strategia dovrebbero essere formulati in maniera semplice e sintetica. Infine, occorre fornire agli studenti un metodo o uno strumento che li aiuti a ricordarli. Rispettando queste cinque linee guida, l'insegnamento può essere mirato ed efficiente. La strategia procedurale proposta da Hudson e Miller (2006) per risolvere problemi due cifre + due cifre senza raggruppamento integra tutte e cinque queste linee guida:

1. Preparazione:
   a. leggi il problema
   b. individua il segno

2. 2. Svolgimento:
   a. somma le unità
   b. scrivi il risultato nella colonna delle unità
   c. somma le decine
   d. scrivi il risultato nella colonna delle decine

3. Conclusione
   a. controlla l'addizione

Sviluppare la conoscenza dichiarativa

Il terzo tipo di conoscenza che gli allievi devono acquisire per avere successo in matematica è la *conoscenza dichiarativa,* data dalle informazioni che gli studenti recuperano dalla memoria senza esitazioni, le informazioni che sanno immediatamente. Ad esempio, lo studente vede il numero 823 e subito dice «ottocentoventitre» oppure vede l'addizione 43 + 26 e subito sa che il risultato è 96 o ancora vede una forma e immediatamente la riconosce ed è in grado di denominarla (ad esempio un parallelepipedo). La capacità di memorizzare le informazioni matematiche e di recuperarle rapidamente è estremamente utile man mano che si procede nel percorso formativo, cioè si avanza verso abilità sempre più complesse, ognuna delle quali si costruisce su quelle apprese in precedenza. È inoltre utile ai fini del mantenimento e della generalizzazione delle abilità (Miller e Heward, 1992).

Lo sviluppo della conoscenza dichiarativa richiede una pratica sufficiente a garantire la padronanza delle abilità insegnate. Fortunatamente, la ricerca ha individuato dei metodi efficaci per fornire queste necessarie opportunità di esercitazione.

Metodi per sviluppare la conoscenza dichiarativa

Il differimento costante è una procedura, convalidata dalla ricerca, che consiste nel fornire allo studente un aiuto che lo porti a dare risposte corrette quasi senza errori. Nel dettaglio, essa si compone delle seguenti fasi.

- **Fase 1**: presentare lo stimolo allo studente (ad esempio una scheda con un fatto aritmetico, un grafico, una rappresentazione bi-dimensionale di un edificio).

- **Fase 2**: dare allo studente 3-5 secondi per rispondere. Se lo studente risponde correttamente entro 3-5 secondi, lo si rinforza verbalmente (ad esempio «Bene: giusto») e si prosegue con lo stimolo successivo.

- **Fase 3**: se nei 3-5 secondi lo studente non risponde o fornisce una risposta scorretta, gli si fornisce un aiuto (ad esempio, si dà una dimostrazione della risposta corretta esplicitando il problema e il risultato giusto).

- **Fase 4**: lo studente ripete la dimostrazione fatta dall'insegnante (ad esempio «Quarantatre più trentasette fa settanta»).

La ricerca ha rilevato sistematicamente i benefici dell'uso della procedura di differimento costante per la costruzione della conoscenza dichiarativa, specie in riferimento alla moltiplicazione (Miller e Hudson, 2007).

Per lo sviluppo della conoscenza dichiarativa, un altro metodo didattico convalidato dalla ricerca è quello di 1 *minuto di problemi,* che consiste nel fornire agli studenti un foglio con più problemi di quanti siano in grado di risolvere in 1 minuto. Un insegnante dà il via e gli allievi cercano di risolverne più che possono in un minuto, trascorso il quale l'insegnante dice: «Stop». Dopodiché, procede con la valutazione dei compiti svolti, registrando il numero di risposte scritte corrette e scorrette e riportandolo in un grafico, che permette agli studenti di vedere l'andamento delle proprie prestazioni e agisce da fattore di motivazione per esercitarsi e migliorare l'automatizzazione delle abilità.

«I minuto di problemi» è un metodo di facile applicazione e, quando si insegna ad allievi con livelli eterogenei di competenza, può essere individualizzato in maniera semplice, somministrando contemporaneamente a ciascuno allievo un foglio differente con compiti relativi all'abilità specifica che deve potenziare.
La ricerca ha rilevato che «1 minuto di problemi» è un metodo efficace per promuovere l'automatizzazione di importanti abilità in studenti con difficoltà in matematica. In particolare, si è dimostrato utile per sviluppare la conoscenza dichiarativa

- delle operazioni con i numeri interi
- della moltiplicazione
- della divisione di numeri a due cifre per numeri a una cifra
- dei fatti numerici a una cifra
- del valore posizionale
- e delle ore.

Linee guida per sviluppare la conoscenza dichiarativa

Per aiutare gli allievi a sviluppare la conoscenza dichiarativa è necessario che la didattica preveda ampie opportunità di esercitazione e consideri alcune importanti linee guida.
La prima di cui tenere conto è monitorare simultaneamente i tempi di risposta e l'accuratezza (Hudson e Miller, 2006). Poiché la conoscenza dichiarativa si manifesta in risposte rapide e automatiche, la limitazione dei tempi a disposizione per lo svolgimento dei compiti appare necessaria. Quando si usa la procedura del differimento costante, il limite dì tempo per la risposta da

parte dello studente è di 3-5 secondi. E' importante che l'insegnante sviluppi un sistema di monitoraggio per stabilire quali problemi vengono risolti correttamente e quali no. Se utilizza delle schede per presentare i problemi, l'insegnante può semplicemente creare due pile distinte, una per i problemi ai quali lo studente ha risposto correttamente entro il tempo stabilito e una per le risposte sbagliate o mancate. Ciò gli permette di determinare quali problemi fanno già parte della conoscenza dichiarativa dello studente e quali invece richiedono ulteriore pratica.

Usando il metodo «1 minuto di problemi», il tempo di risposta è limitato a un minuto e la prestazione dell'allievo può essere monitorata in vari modi. Ad esempio, una volta scaduto il tempo, l'insegnante e gli allievi possono leggere insieme i problemi e rispondere ad alta voce; gli studenti scrivono sul loro foglio un segno di visto (o un più, o un altro simbolo positivo) accanto a quelli che hanno risolto correttamente e un segno negativo (un meno, una crocetta, ecc.) accanto a quelli che hanno sbagliato. Un'altra possibilità è quella di far controllare agli allievi la correttezza del loro compito usando la calcolatrice o un foglio con le risposte. Infine, può essere utile che, in un secondo momento, l'insegnante controlli il tempo che gli allievi impiegano e fornisca feedback. Come per la procedura di differimento costante, anche in questo caso è la prestazione dell'allievo a indicare quali abilità devono essere ulteriormente esercitate e consolidate.

La seconda linea guida per l'insegnamento della conoscenza dichiarativa è quella di scegliere le modalità di esercitazione in considerazione delle caratteristiche dei soggetti. Ad esempio, per soggetti con difficoltà di scrittura può essere più indicato esercitarsi con una procedura di differimento costante o con «1 minuto di problemi» da svolgere oralmente anziché per iscritto.

Poiché lo sviluppo della conoscenza dichiarativa richiede una pratica ampia e prolungata, per alcuni allievi può essere opportuno utilizzare una varietà di metodi (ad esempio differimento costante con l'insegnante, differimento costante con i compagni, «1 minuto di problemi » integrato in un gioco individuale, «1 minuto di problemi» integrato in un gioco a squadre che coinvolge l'intera classe). In questo modo si contribuisce a promuovere e mantenere alta la motivazione dell'allievo e la sua disponibilità a continuare a esercitarsi, così che resti impegnato e coinvolto attivamente.

Un percorso equilibrato di apprendimento

Per offrire al massimo numero di allievi un accesso alla conoscenza matematica e aiutarli a raggiungere le competenze previste, è importante che il percorso proposto sia equilibrato. Questo significa non soltanto progettare lezioni ed attività per le diverse aree di contenuto (ad esempio, numeri e operazioni, algebra, geometria, misure, analisi di dati e probabilità) ma anche affrontare ognuna di esse considerando opportunamente le tre tipologie generali di conoscenza (*concettuale, procedurale e dichiarativa*). Comprendere come i tre tipi di conoscenza si costruiscono e lavorano insieme è utile non soltanto per impostare una didattica efficace ma anche per capire perché gli studenti hanno difficoltà quando uno o più di essi vengono trascurati all'interno del curricolo di matematica.

Benché i tre tipi di conoscenza siano distinti, sono ugualmente uniti da importanti interrelazioni. La conoscenza dichiarativa fornisce una base essenziale per la conoscenza procedurale, permettendo allo studente di accedere ai fatti aritmetici nella risoluzione dei compiti (Bottge, 2001; Goldman *et al.*, 1997). Ad esempio, trovare un comune denominatore per due frazioni è un compito procedurale, ma al fine di individuare il minimo comune multiplo il soggetto deve essere in grado di rievocare i multipli di ciascun denominatore (conoscenza dichiarativa). Il rapporto tra conoscenza procedurale e concettuale è diverso e pare svilupparsi in maniera interattiva, per cui i progressi in un tipo di conoscenza portano a progressi anche nell'altro (Rittle-Johnson, Siegler e Alibali, 2001). Ad esempio, quando si insegna il concetto di addizione di numeri a tre cifre (ad esempio 523 + 252), l'insegnante può guidare lo studente usando blocchi a base dieci e un processo passo per passo:

- passo 1: rappresentare il numero sopra con blocchi da centinaia, decine e unità
- passo 2: rappresentare il numero sotto con blocchi da centinaia, decine e unità
- passo 3: contare la somma dei blocchi da unità e scrivere il risultato
- passo 4: contare la somma dei blocchi da decine e scrivere il risultato
- passo 5: contare la somma dei blocchi da centinaia e scrivere il risultato

La procedura facilita chiaramente la comprensione dei concetti di addizione e valore posizionale attraverso l'uso dei blocchi, ma l'utilizzo sistematico di questi materiali potenzia anche la comprensione della procedura da applicare quando i blocchi verranno accantonati.

Tradizionalmente, allo sviluppo della conoscenza dichiarativa e procedurale è stato dato grande rilievo (NCTM, 2000). Vista l'esigenza del dover affrontare le diverse aree di contenuto matematico, si può essere tentati di ignorare la relazione interattiva fra i tre tipi di conoscenza, e soprattutto la necessità di operare con tempi congrui per sviluppare quella concettuale. La conoscenza procedurale, se non è raccordata a quella concettuale, è estremamente limitata, in quanto lo studente è privo delle conoscenze necessarie alla generalizzazione (Goldman et al., 1997). Se gli allievi non sono in grado di generalizzare le procedure matematiche apprese alla risoluzione di problemi reali, si fallisce interamente nell'intero obiettivo dell'insegnamento della matematica.

Considerazioni conclusive

Per aiutare il massimo numero di allievi a raggiungere le competenze previste dagli attuali ordinamenti (Obbligo d'istruzione, C.M. n. 4 del 15.01.2009) è importante sistematiche opportunità di apprendimento nelle diverse aree di contenuto matematico (ad esempio, numeri e operazioni, algebra, geometria, misure, analisi di dati e probabilità) e affrontare ognuna di esse tenendo conto dei tre ambiti di conoscenza (concettuale, procedurale e dichiarativa). Si suggerisce di usare approcci d'insegnamento diretto delle conoscenze matematiche, basate principalmente su rappresentazione e manipolazione, procedure cognitive e metacognitive, e metodi convalidati dalla ricerca, dei quali sono stati qui forniti vari esempi, insieme a linee guida didattiche per sviluppare la conoscenza concettuale, procedurale e dichiarativa necessaria affinché l'insegnamento-apprendimento della matematica abbia successo.

BIBLIOGRAFIA

Bottge B. (2001), *Reconceptualizing mathematics problem solving for low-achieving students,* «Remedial and Special Education», vol. *22,* pp. 102-112.

Brown D. e Frank A.R. (1990), *Let me do it! Self-monitoring in solving arithmetic problems,* «Education and Treatment of Children», vol. *13,* pp. 239-248.

Bulgren J.A., Lenz BK, Desbler D.D. e Schumaker J.B. *(*1995), *The content enhancement series: The concept comparison routine,* Lawrence, KS, Edge Enterprises.

Butler F.M., Miller S.P., Crelian K., Babbitt B. e Pierce T. *(2003), Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences,* «Learning Disabilities Research & Practice», vol. *18, pp. 99-111.*

Case L.P., Harris K.R. e Grahani S. (1992), *Improving the mathematical problem-solving skills of students with learning disabilities: Self-regu1ated strategy development,* «Journal of Special Education», vol. *26,* pp. 1-19.

CENSIS (2008). *Rapporto sulla situazione sociale del Paese,* Milano, Franco Angeli.

Checchi, D. e Braga, M. (in stampa), *Divario territoriale e formazione delle competenze degli studenti quindicenni*, «*RicercAzione»,* Centro Studi Erickson.

Cusinato, W. (2007), *Considerazioni sui risultati dei focus group coi dirigenti scolastici di ResFor,* «ISRE», 14(2), pp. 112-127.

D'Amore, B. e Sbaragli, S. (Eds) (2006), *Il convegno del ventennale,* Bologna, Pitagora.

Favaretto, C. e Salatin, A. (2007), *Percorsi di riforma del sistema formativo secondario italiano e azioni per il successo formativo: alcune riflessioni sul caso della Lombardia* «ISRE», 14(2), pp. 128-140.

Gentile, M. (2008). *Il Trentino nell'indagine internazionale OCSE-PISA 2006. Rapporto preliminare,* Trento, IPRASE.

Gentile, M. e Tacconi, G, (2007), *Indagine sul successo formativo. Un modello di ricerca,* «ISRE», 14(2), pp. 13-48.

Gentile, M. *et. al.* (2006). *L'indagine sul successo formativo. Progetto Resfor.* Resoconto di Ricerca. Milano: Rete per il successo formativo, ID 274450. Azione 2: Ricerca, analisi e studio ID 278161. CNOS-FAP, FSE, Ministero del Lavoro e delle Politiche Sociali, Regione Lombardia.

Goldman S., Hasselbring T.S. e The Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1997*), Achieving meaningful mathematics literacy for students with learning disabilities,* «Journal of Learning Disabilities», vol. *30, pp. 198-208.*

Good T. e Grouws D. *(1979), The Missouri mathematics effectiveness project: An experimental study in fourth-grade classrooms,* «Journal of Educational Psychology», vol. *71, pp. 355-362.*

Hudson P. e Miller S.P. (2006), *Designing and implementing mathematics instruction for students with diverse learning needs,* Boston, Allyn & Bacon.

ISFOL (2008). *Rapporto 2008,* Roma, Rubettino.

Kame'enui E.J. e Simmons D.C. (1990), *Designing instructional strategies: The prevention of academic learning problems,* Columbus, 014, Merrill.

Kroesbergen E.H. e Van Luit LE.H. (2003), *Mathematics interventions for children with special educational needs,* «Remedial and Special Education», vol. 24, pp. 97-114.

Mercer C.D. e Mercers A.R. (2005), *Tecching students with learning problems,* Upper Saddle River, NJ, Merrill.

Mercer C.D. e Miller S.P. (1991-1994), *The strategic math series,* Lawrence, KS, Edge Enterprises.

Miller A, D. e Heward W.L. (1992), *Do your students really know their math facts? Using dally time trials to bulld fluency,* «Intervention in School and Clinic», vol. 28, pp. 98-104.

Miller S.P. e Mercer C.D. (1991), *Addition facis 0 to* 9, Lawrence, KS, Edge Enterprises.

Miller, S.P. e Hudson, P.J. (2007). *Using evidence-based practices to build mathematics competence related to conceptual, procedural, and declarative knowledge.* «Learning Disabilities Research and Practice», Vo. *22,* n. 1, pp. *47-57.*

Montague M., Applegate B. e Marquard K. (1993), *Cognitive strategy instruction on the mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities,* «Learning Disabilities Research & Practice», vol. 8, pp. 223-232.

MPI (2008). Superiori, risultati del primo quadrimestre: 2 milioni di allievi (il 70% degli iscritti) hanno riportato 8 milioni di insufficienze. Roma: MPI [Disponibile su: http://www.pubblica.istruzione.it/ministro/comunicati/2008/100308.shtml].

MPI/Ufficio Stampa (2007). *Scuola, 408 mila ragazzi contraggono il debito in matematica.* Roma: MPI. [Disponibile su: http://www.pubblica.istruzione.it/ministro/comunicati/2007/071107matematica.shtml].

NCTM (2000), *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

OCSE (2004). *Pisa 2003. Valutazione dei quindicenni. Quadro di riferimento: conoscenze e abilità matematiche, lettura, scienze e problem solving,* Roma, Armando Editore.

OECD (2004). *PISA 2003. Learning for Tomorrow's World,* Paris, OECD Publishing.

OECD (2007). *PISA 2006. Science competencies for tomorrow's world,* Paris, OECD Publishing.

OECD (2008). *Education at a glance. OECD Indicators,* Paris, OECD Publishing.

Rittle-Johnson B., Siegler R.S. e Alibali M.W. (2001), *Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process,* «Journal of Educational Psychology», vol. 93, pp. 346-362.

Rivera D. e Smith D.D. (1988), *Using a demonstration strategy to teach middle school students with learning disabilities how to compute long division,* «journal of Learning Disabilities», vol. 21, pp. 77-81.

Roncoroni, A.M. (2007). *L'insegnamento della matematica nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria di 1° grado: continuità o rottura*? «Difficoltà di matematica», 4 (1), pp. 61-88.

Rosenshine B. (1995), *Advances in research on instruction, «*The Journal of Educational Research*», vol. 88, pp. 262-268.*

Swanson 141. e Hoskyn M. (2001), *A meta-analysis of intervention research for adolescent students with learning disabilities,* «Learning Disabilifies Research & Practice», vol. 16, pp. 109-119.

Tacconi, G. (2007), *I processi di insegnamento e apprendimento a confronto tra "Istruzione" e "Istruzione e Formazione Professionale (Ifp),* «ISRE», 14(2), pp. 80-111.

Villani, L. (2003). *Matematica palese e matematica nascosta nella nostra vita quotidiana.* «Prospettive EP», 16 (1), pp. 4-11.